DURÉE : 4 heures

Les deux parties du problème sont indépendantes

PREMIÈRE PARTIE

L'ensemble des matrices carrées à coefficients réels (resp. des matrices réelles symétriques) d'ordre n est noté $\mathfrak{M}_n$ (resp. $\mathfrak{S}_n$). I étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, on considère une application M de I dans $\mathfrak{M}_n$ telle que, a_j^i désignant le terme de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne, la fonction $t \rightsquigarrow a_j^i(t)$ soit continûment dérivable dans I. On pourra noter $M = [a_j^i]$ ou $M(t) = [a_j^i(t)]$ et on définit $M' = [a_j^{i\prime}]$ où $a_j^{i\prime}$ désigne la dérivée de a_j^i. Éventuellement, on pourra raisonner sur l'application $t \rightsquigarrow m(t)$ de I dans l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas $m(t)$ est l'endomorphisme dont l'image matricielle relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $M(t)$. On pourra également utiliser la structure euclidienne de $\mathbb{R}^n$, la base canonique étant alors une base orthonormée. De même, si $t \rightsquigarrow X(t)$ est une application de I dans $\mathbb{R}^n$, on désignera par $X'(t)$ le vecteur dont les composantes dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sont les dérivées des composantes de X dans cette même base.

Une matrice $A(t) \in \mathfrak{M}_n$ antisymétrique étant donnée, à coefficients continus dans I, on dit qu'une application M de I dans l'ensemble $\mathfrak{S}_n$ est solution sur I d'une équation « de la forme L » si :

$$\forall t \in I \qquad M'(t) = A(t)\,M(t) - M(t)\,A(t)\,.$$

On rappelle qu'une matrice est dite symétrique si elle est égale à sa transposée, antisymétrique si elle est égale à l'opposée de sa transposée.

PREMIÈRE QUESTION

I.1. On donne :

$$I = \{t \in \mathbb{R},\ t^2 < 1\} \qquad \text{et} \qquad M(t) = \begin{bmatrix} 3 + t & \sqrt{1 - t^2} \\ \sqrt{1 - t^2} & 3 - t \end{bmatrix}.$$

a. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $M(t)$.

b. À la matrice $M(t)$ on associe, dans un espace affine de dimension 3, muni du repère orthonormé $Oxyz$, la courbe (E) définie par la représentation paramétrique suivante :

$$x(t) = 3 + t$$
$$y(t) = \sqrt{1 - t^2}$$
$$z(t) = 3 - t\,.$$

Montrer que (E) est contenue dans l'intersection d'un plan et d'un cylindre de révolution. En déduire que (E) est contenue dans une ellipse dont on déterminera le centre, les axes de symétrie et la longueur de ses axes. Cette courbe (E) est-elle l'ellipse entière ?

c. Montrer que M satisfait sur I à une équation de la forme L.

I.2. $A(t)$ étant une matrice de $\mathfrak{M}_2$ antisymétrique donnée à coefficients $a_1^2(t)$ continus et non identiquement nuls dans un intervalle I donné de $\mathbb{R}$, on suppose que :

$M(t) = \begin{pmatrix} x(t) & y(t) \\ y(t) & z(t) \end{pmatrix}$ est solution sur I d'une équation de la forme L : $M' = AM - MA$.

On associe à M la courbe (E) de représentation paramétrique $t \rightsquigarrow x(t)$, $t \rightsquigarrow y(t)$, $t \rightsquigarrow z(t)$ comme il est dit précédemment.

Tournez la page S. V. P.

a. En utilisant les relations vérifiées par les fonctions x, y, z, montrer que la trace de M est constante sur I. Que peut-on en déduire pour la courbe (E) ?

b. Déduire de ce qui précède un système différentiel vérifié par le couple de fonctions (x, y) puis une relation simple entre ces deux fonctions x et y vérifiée sur I.

c. Montrer que (E) est contenue dans une ellipse dont on précisera le centre, les axes et le rapport des longueurs des axes.

d. Montrer que le déterminant de $M(t)$ est constant sur I.

I.3. *a.* Les hypothèses étant celles de la question précédente, montrer que les valeurs propres de la matrice $M(t)$ sont constantes sur I.

b. On suppose que $t \rightsquigarrow M(t) \in \mathcal{S}_2$ est continûment dérivable dans I et que les valeurs propres de $M(t)$ sont des constantes dans I. On suppose également qu'il n'existe aucun sous-intervalle de I dans lequel $M(t)$ soit une matrice constante. Montrer que la fonction y n'est identiquement nulle sur aucun sous-intervalle de I et que $M(t)$ est solution d'une équation de la forme L sur certains intervalles que l'on précisera.

Deuxième question

Dans cette deuxième question, les matrices $M(t)$ symétriques réelles continûment dérivables dans l'intervalle I sont supposées vérifier la propriété P suivante : $\forall t \in I$, il existe, dans $\mathbb{R}^n$, muni de sa structure euclidienne, une base orthonormée $(e_1(t), e_2(t), \ldots, e_n(t))$ constituée de vecteurs propres de $M(t)$ telle que les fonctions $t \rightsquigarrow e_i(t)$ soient toutes continûment dérivables dans I.

II.1. On suppose ici que $n = 3$.

a. Pour tout t réel, on désigne par $E(t)$ la matrice (dont les colonnes peuvent être interprétées comme celles des composantes sur la base canonique de $\mathbb{R}^3$ des trois vecteurs $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$) définie par :

$$E(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \cos t \sin t & \cos^2 t & -\sin t \\ \sin^2 t & \sin t \cos t & \cos t \end{bmatrix}$$

Montrer que $(e_1(t), e_2(t), e_3(t))$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Calculer les composantes dans cette base de chacun des vecteurs dérivés $e_1'(t)$, $e_2'(t)$, $e_3'(t)$. Que peut-on dire de la matrice constituée par les colonnes de ces composantes ?

b. Les fonctions L, M, N à valeurs dans $\mathfrak{M}_3$ étant supposées dérivables dans l'intervalle I, montrer que les produits matriciels LM et LMN sont dérivables et exprimer leurs dérivées à l'aide de L', M', N'. Si M^T désigne la transposée de M, que peut-on dire de $(M^T)'$? Si $U(t)$ désigne la matrice des composantes d'une base orthonormée $(e_1(t), e_2(t), e_3(t))$ de $\mathbb{R}^3$, quelle propriété possède la matrice U^TU' ? Retrouver ainsi la propriété trouvée dans l'exemple de la question *a*.

c. Soit $M(t)$ une matrice symétrique dérivable possédant la propriété P. Montrer que les valeurs propres de $M(t)$ sont des fonctions dérivables dans I.

d. On suppose que $t \rightsquigarrow D(t)$ est une fonction dérivable à valeurs dans l'ensemble des matrices diagonales. Montrer que si D est solution d'une équation de la forme L, alors $D(t)$ est une matrice constante sur l'intervalle I.

Tournez la page S. V. P.

e. Soit $t \rightsquigarrow M(t)$ une fonction à valeurs dans l'espace des matrices symétriques, possédant la propriété P, et solution sur I d'une équation de la forme L. Montrer que la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres $\lambda_i(t)$ de $M(t)$ est aussi sur l'intervalle I solution d'une équation de la forme L.

f. Déduire de ce qui précède que la condition nécessaire et suffisante, pour que $M(t)$ symétrique possédant la propriété P soit de valeurs propres constantes sur l'intervalle I, est que M soit solution sur I d'une équation de la forme L.

II.2. Généraliser les résultats précédents au cas des matrices $n \times n$ symétriques réelles où n est un entier $\geqslant 1$ quelconque.

DEUXIÈME PARTIE

On se propose dans cette partie d'appliquer à la résolution d'une équation différentielle une propriété d'invariance de sous-espaces propres pour un ensemble convenable d'endomorphismes.

1° Trouver toutes les 2×2 matrices réelles qui commutent à une 2×2 matrice réelle H donnée. (On pourra distinguer le cas où H est diagonalisable du cas où H ne l'est pas.)

2° Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel réel. Montrer que si deux endomorphismes f et g de $\mathcal{V}$ commutent, alors leurs sous-espaces propres de dimension 1 sont les mêmes.

La réciproque est-elle exacte ? Sinon, donner un contre-exemple.

3° $\mathcal{V}$ est l'ensemble des fonctions réelles, indéfiniment dérivables sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

On définit pour tout y de $\mathcal{V}$:

$$p_1(y) \equiv y' + a_1 y$$
$$p_2(y) \equiv y' + a_2 y$$

où a_1 et a_2 appartiennent à $\mathcal{V}$.

a. Montrer que p_1 et p_2 sont des endomorphismes de $\mathcal{V}$.

b. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a_1 et a_2, pour que p_1 et p_2 commutent.

4° On définit l'endomorphisme P de $\mathcal{V}$ par :

$$P(y) \equiv y'' + \left(\frac{2}{\operatorname{ch} x} - 2\right) y' + \frac{1 - \operatorname{sh} x - 2 \operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x} y.$$

Montrer que P est de la forme :

$$P = p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 .$$

En déduire successivement, une solution particulière de $P(y) = 0$, et la solution générale.

5° On suppose que p_1 et p_2 sont les endomorphismes trouvés dans la question précédente. Montrer que tout nombre réel λ est valeur propre de p_1. Quelle est la dimension du sous-espace propre de p_1 relativement à λ ? Déterminer un élément y_1 de ce sous-espace propre.

Montrer que y_1 est vecteur propre de P. Pour quelle valeur propre ? Déterminer alors le sous-espace propre de P relatif à cette valeur.

Tout nombre réel est-il valeur propre de P ?

Note de l'U.P.S. : Deuxième partie 2°) faux cf $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il faudrait supposer en plus que tous les sous-espaces propres sont de dimension 1 !